**Αριθμητική Ανάλυση Ι και Εργαστήριο**

**Τελική Εργασία 2022**

Ονοματεπώνυμο: Ελένη Στυλιανού

Email: elenistylianou03@live.com

Αριθμός Μητρώου: ge21708

Εξάμηνο: 3ο

Εργαστήριο: Ομάδα Α-Δευτέρα 15:00-16:30

**Άσκηση 1**

Στην άσκηση 1 χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα MATLAB.

Με την βοήθεια του editor δημιουργήθηκε ένα αρχείο «askisi1.m» στο οποίο βρίσκεται η εκτέλεση της άσκησης.

Κώδικας:

Graphical user interface, application, Word

Description automatically generated

Επίσης, για την εκτέλεση του κώδικα της συγκεκριμένης άσκησης δημιουργήσαμε τρεις συναρτήσεις.

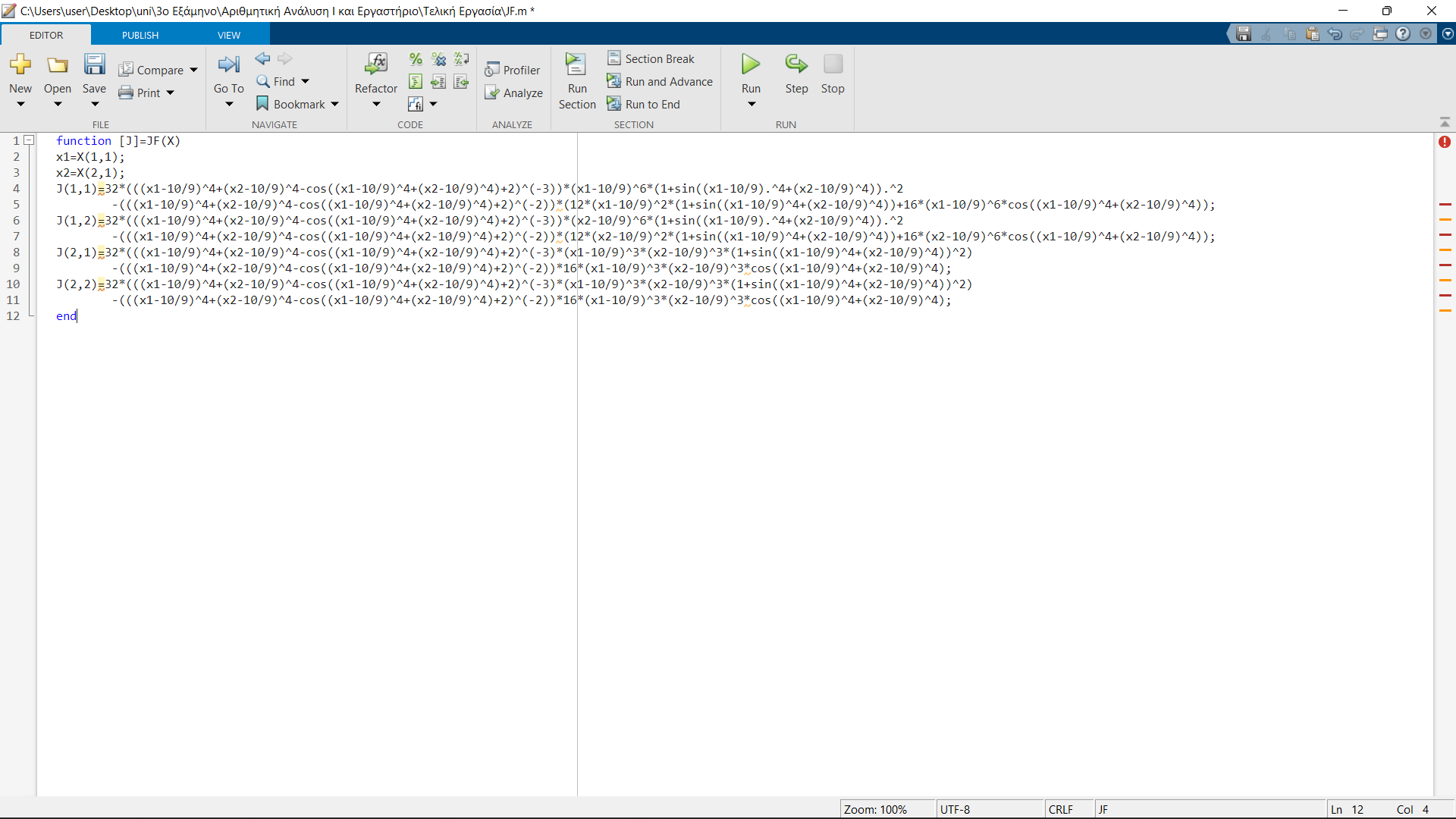
Για την κατασκευή της συνάρτησης F, η οποία δίνει τα κρίσιμα σημεία της Ε όταν F(x)=0, δημιουργήσαμε την συνάρτηση «F.m» .

Graphical user interface, text, application

Description automatically generatedΚώδικας:

Στην συνάρτηση αυτή παραγωγίσαμε ως προς x1 την Ε και ορίσαμε το αποτέλεσμα ως f(1,1) και παραγωγίσαμε ως προς x2 την Ε και ορίσαμε το αποτέλεσμα ως f(2,1)

Για την υλοποίηση του Ιακωβιανού πίνακα της F σε κάθε σημείο x του χώρου δημιουργήσαμε τη συνάρτηση «JF.m».

Κώδικας:

Στην συνάρτηση αυτή παραγωγίσαμε ως προς x1 και x2 την f(1,1) και ορίσαμε τα αποτελέσματα ως J(1,1) και J(2,1) αντίστοιχα και παραγωγίσαμε ως προς x1 και x2 την f(2,1) και ορίσαμε τα αποτελέσματα ως J(2,2) και J(1,2) αντίστοιχα.

Για την υλοποίηση της μεθόδου του Νεύτωνα (Newton-Raphson), με την οποία επιτυγχάνουμε την προσέγγιση των κρίσιμων σημείων, κατασκευάσαμε τη συνάρτηση «NR.m».

Κώδικας:

Graphical user interface, application

Description automatically generated

Στη συγκεκριμένη συνάρτηση χρησιμοποιήθηκε η ανάποδη διαίρεση, ώστε να αποφύγουμε την χρήση της εντολής inv().

xtel=X0-JF(X0)^(-1)\*F(X0)=>JF(X0)\*xtel=JF(X0)\*X0-F(X0)=>xtel=JF(X0)\(JF(X0)\*X0- F(X0))

Με την εκτέλεση του κώδικα παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα στο command window:

* Για X0=(1,2):
* k=4

xtel =

-94.6079

-49.8465

* k=6

xtel =

-94.6079

-49.8465

* k=20

xtel =

-94.6079

-49.8465

* k=200

xtel =

-94.6079

-49.8465

* Για X0=(2,4):
* k=4

xtel =

-0.1997

4.0140

* k=6

xtel =

-0.1880

4.0140

* k=20

xtel =

-0.1840

4.0140

* k=200

xtel =

-0.1840

4.0140

* Για X0 τυχαίο διάνυσμα, το οποίο δίνεται από την εντολή rand(2,1). Για τα συγκεκριμένα αποτελέσματα έχουμε Χ0=(0.8061,0.8248):
* k=4

xtel =

67.6458

-74.6952

* k=6

xtel =

67.6458

-74.6952

* k=20

xtel =

67.6458

-74.6952

k=200

xtel =

67.6458

-74.6952

Από τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε πως έχουμε αρκετά καλές προσεγγίσεις στα κρίσιμα σημεία και πως όσο περισσότερες επαναλήψεις εκτελεστούν τόσο πιο ακριβές είναι το αποτέλεσμα μας, γεγονός που φαίνεται κυρίως στη δεύτερη περίπτωση για X0=(1,2).

Στη συνέχεια κατασκευάσαμε κώδικα για την υλοποίηση της τροποποιημένης μεθόδου του Νεύτωνα(Newton-Raphson) για X0=(2,4).

Κώδικας:

Graphical user interface, text, application, Word

Description automatically generated

Και σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιήθηκε η ανάποδη διαίρεση, ώστε να αποφύγουμε την χρήση της εντολής inv().

Με την εκτέλεση του κώδικα παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα στο command window:

* k=4

xtel =

-94.6079

-49.8465

* k=6

xtel =

-94.6079

-49.8465

* k=20

xtel =

-94.6079

-49.8465

* k=200

xtel =

-94.6079

-49.8465

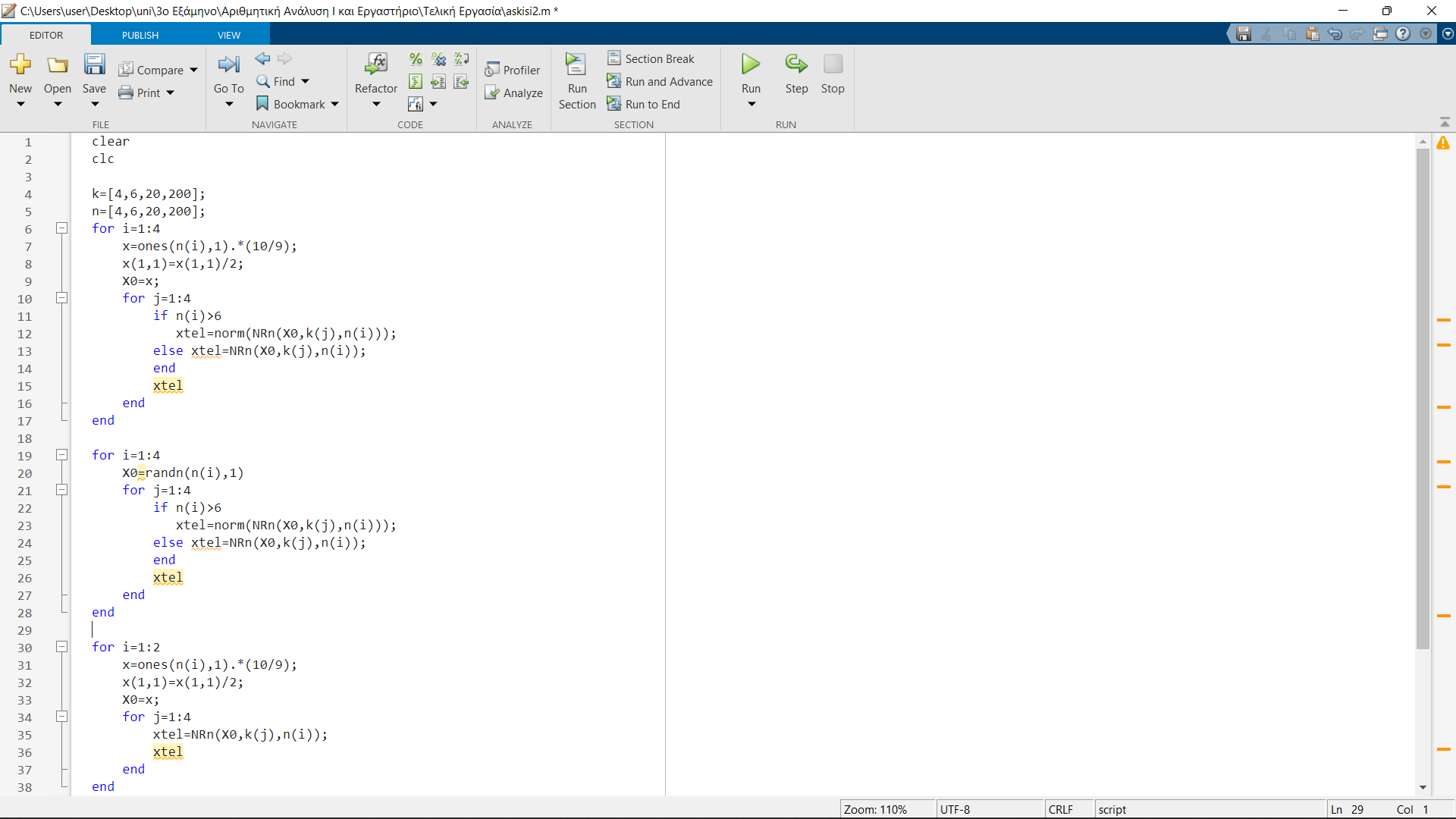
Η τροποποιημένη μέθοδος του Νεύτωνα χρησιμοποιεί τον Ιακωβιανό πίνακα υπολογισμένο στο Χ0 σε κάθε επανάληψη, επομένως με την χρήση αυτής της μεθόδου το πρόγραμμα είναι οικονομικότερο όσον αφορά τις πράξεις που εκτελούνται.

**Άσκηση 2**

Στην άσκηση 2 χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα MATLAB.

Με την βοήθεια του editor δημιουργήθηκε ένα αρχείο «askisi2.m» στο οποίο βρίσκεται η εκτέλεση της άσκησης.

Κώδικας:



Επίσης, για την εκτέλεση του κώδικα της συγκεκριμένης άσκησης δημιουργήσαμε τρεις συναρτήσεις.

Για την κατασκευή της συνάρτησης Fn, η οποία δίνει τα κρίσιμα σημεία της Ε όταν F(x)=0, δημιουργήσαμε την συνάρτηση «Fn.m» .

Κώδικας:

A screenshot of a computer

Description automatically generated

Στην συνάρτηση αυτή παραγωγίσαμε ως προς X(i) την Ε και ορίσαμε το αποτέλεσμα ως f(i,1), i=1,…,n. Επίσης, χρησιμοποιήθηκε η εντολή ones(n,1), η οποία μας δίνει πίνακα n×1 με όλα τα στοιχεία του ίσα με 1.

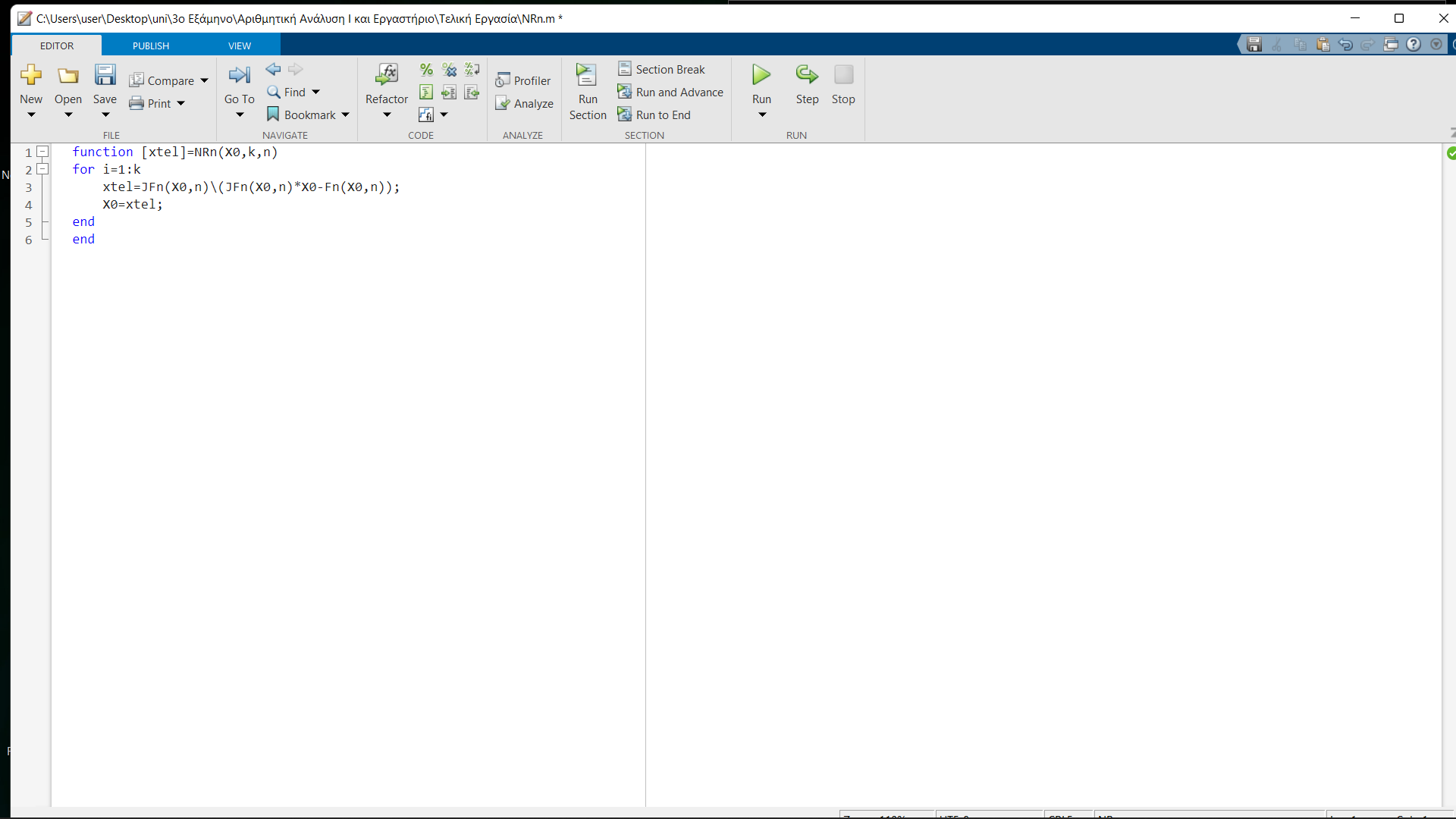
Για την υλοποίηση του Ιακωβιανού πίνακα της f σε κάθε σημείο x του χώρου δημιουργήσαμε τη συνάρτηση «JFn.m».

Graphical user interface, text, application, Word

Description automatically generatedΚώδικας:

Στην συνάρτηση αυτή παραγωγίσαμε ως προς X(i) για i=j και X(j) για i≠j την f(i,1) και ορίσαμε τα αποτελέσματα ως J(i,j), i=1,…,n και j=1,…,n.

Για την υλοποίηση της μεθόδου του Νεύτωνα (Newton-Raphson), με την οποία επιτυγχάνουμε την προσέγγιση των κρίσιμων σημείων, κατασκευάσαμε τη συνάρτηση «NRn.m».

Κώδικας:

Χρησιμοποιήθηκε και σε αυτή τη συνάρτηση η ανάποδη διαίρεση, ώστε να αποφύγουμε την χρήση της εντολής inv().

Με την εκτέλεση του κώδικα παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα στο command window:

* Για X0=10/9\*(0.5, 1, 1, …, 1)Τ ∈ Rn

Παίρνουμε για όλα τα n και k

xtel =

NaN

Παρατηρούμε πως παρουσιάζεται σφάλμα εξαιτίας του πίνακα JFn, ο οποίος δεν είναι αντιστρέψιμος αλλά ούτε καλά ορισμένος για το συγκεκριμένο αρχικό διάνυσμα, γεγονός που μας δείχνει πως δεν μπορούν να υπολογιστούν τα κρίσιμα σημεία στη συγκεκριμένη περίπτωση.

* Για X0 τυχαίο διάνυσμα, το οποίο δίνεται από την εντολή randn(n(i),1).
* n=4

Για τα συγκεκριμένα αποτελέσματα έχουμε:

X0 =

-0.0890

-1.0334

0.1007

1.6681

* k=4

xtel =

-0.1287

-1.1044

0.0672

1.1187

* k=6

xtel =

-0.1488

-1.1403

0.0503

1.1120

* k=20

xtel =

-0.3440

-1.4891

-0.1140

1.1111

* k=200

xtel =

NaN

NaN

NaN

NaN

* n=6

Για τα συγκεκριμένα αποτελέσματα έχουμε:

X0 =

-0.3991

0.6275

-1.1213

-0.9217

-1.2390

-1.4347

* k=4

xtel =

-0.3169

0.6539

-0.9997

-0.8109

-1.1110

-1.2960

* k=6

xtel =

-0.3963

0.6284

-1.1171

-0.9178

-1.2346

-1.4299

* k=20

xtel =

-0.3398

0.6465

-1.0337

-0.8418

-1.1467

-1.3347

* k=200

xtel =

-0.8081

0.4966

-1.7259

-1.4721

-1.8754

-2.1241

* n=20

Για τα συγκεκριμένα αποτελέσματα έχουμε:

X0 =

-0.9425

-0.8996

-0.4421

-1.6435

-0.5069

-0.7749

-0.7937

-0.3168

1.1718

-0.0048

0.4210

1.5855

0.6846

0.1294

1.0860

2.2299

-0.5170

0.8484

-0.8140

-1.2485

* k=4

xtel =

3.8335

* k=6

xtel =

3.8262

* k=20

xtel =

5.0396

* k=200

xtel =

NaN

* n=200

Για τα συγκεκριμένα αποτελέσματα έχουμε:

X0 =

-0.6774

-0.0737

-1.9617

-1.5986

-0.0571

0.6006

0.7855

0.4373

-0.1798

0.5300

2.4929

1.9768

-0.0594

1.4144

-0.6206

0.3508

0.1444

0.7633

-1.2149

0.6243

0.1686

0.3288

-1.0286

-0.3936

-1.5441

-0.7339

-0.9699

-0.3496

0.1692

0.8480

-1.0691

0.2936

1.0865

0.9613

-1.5944

0.7320

-0.1688

1.3814

0.9293

-0.3488

0.2694

0.5109

-2.4612

-0.6140

-0.3954

-1.1448

-2.2324

0.8400

-0.6138

1.1722

-0.9582

0.9531

0.7034

0.5599

-1.0380

-0.1783

-0.4699

-0.9599

-0.4450

-1.6212

-0.1574

-0.1975

-0.8314

0.6373

-1.0486

-0.2482

0.5249

0.2132

-2.3974

-0.7724

-0.4061

-0.5533

-1.3530

-0.0431

-0.1676

1.2796

0.1122

0.7055

-0.1304

-1.8255

-1.4733

-0.7514

-0.4337

0.5764

-0.8345

-0.6288

0.2559

-0.5620

-1.2284

-0.5540

-0.6803

0.6912

0.2219

0.5459

-0.4597

2.1167

0.1091

-0.9198

-1.3236

0.0987

-0.4066

-1.3519

-0.4698

-1.6280

0.6824

1.9437

0.7402

-0.3232

1.3596

0.2910

-2.2190

-0.1446

0.0787

0.5622

-0.1643

1.1737

-1.3284

2.4592

1.3522

-0.2468

0.2880

-0.8727

-0.9308

0.0762

0.9857

0.9258

2.1315

-0.3258

-0.2230

-2.7343

-0.3085

0.1461

0.0377

-0.6476

-1.2874

-0.4110

2.2005

-0.9290

0.0027

-1.1576

1.1645

0.7864

0.1603

-0.0475

1.4789

0.5778

-0.0035

0.1367

1.5390

0.4948

0.2689

0.5686

-0.0986

-0.9872

0.3676

-1.6223

-0.6941

1.0579

-0.6946

0.2701

-0.2153

0.2775

0.4236

-0.5009

-2.1246

1.0212

-0.5579

0.2848

0.9696

-1.0824

1.2562

0.7412

0.1224

-0.3588

1.2052

0.4458

0.5323

2.6929

0.5546

1.1765

-0.0507

1.8023

-0.0951

-0.9950

-0.0166

-1.7160

1.2576

-1.1842

0.2816

0.9143

0.4827

0.3736

-0.8645

-0.0551

0.9304

-0.7636

-1.2357

-0.6987

0.8544

-0.2746

* k=4

xtel =

12.7200

* k=6

xtel =

12.7034

* k=20

xtel =

12.7643

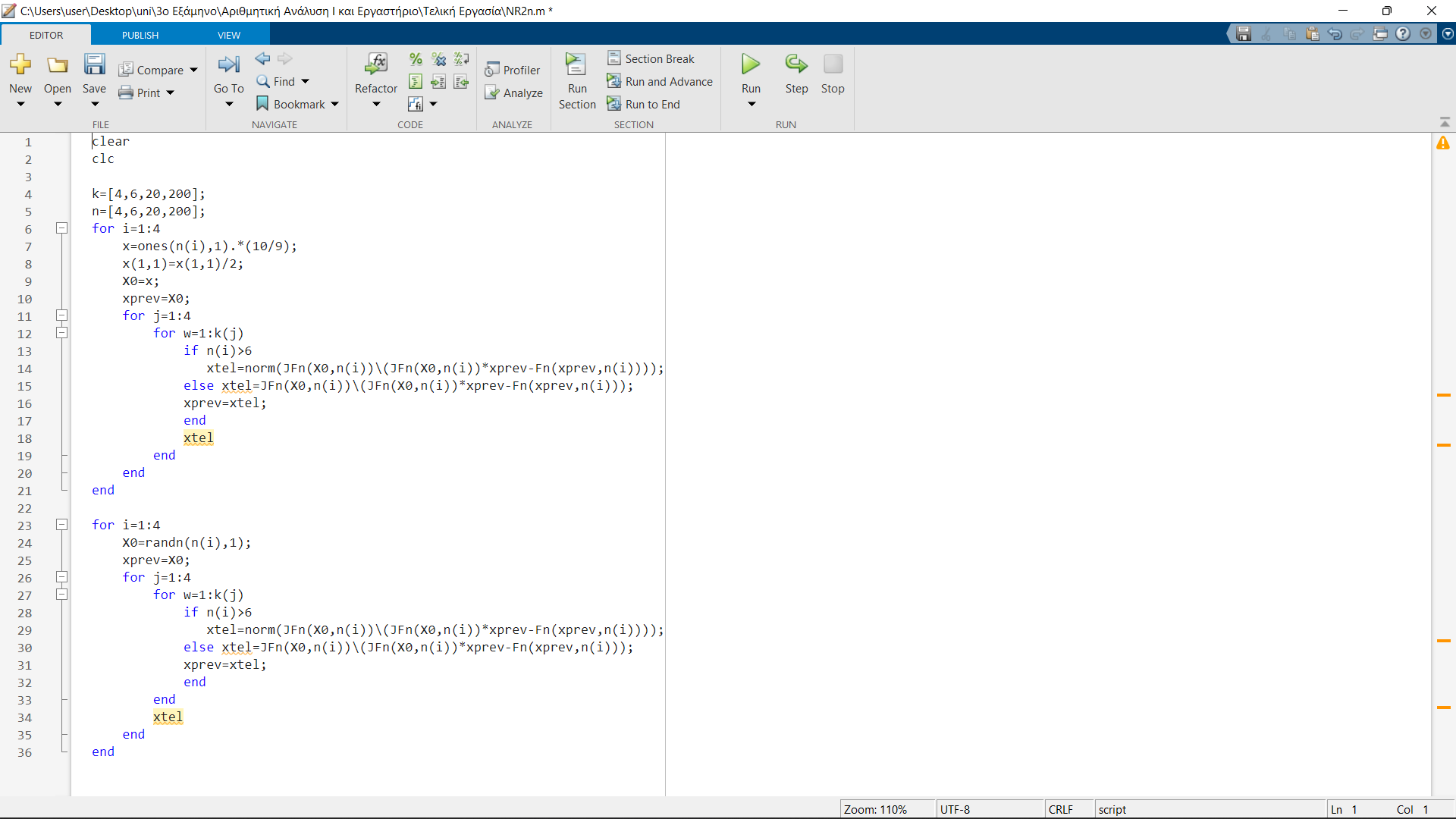
* k=200

xtel =

NaN

Όταν n=20 και n=200 παίρνουμε ως αποτέλεσμα την Ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος xtel.

Στη συνέχεια κατασκευάσαμε κώδικα για την υλοποίηση της τροποποιημένης μεθόδου του Νεύτωνα(Newton-Raphson).

Κώδικας:

Και σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιήθηκε η ανάποδη διαίρεση, ώστε να αποφύγουμε την χρήση της εντολής inv().

Με την εκτέλεση του κώδικα παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα στο command window:

* Για X0=10/9\*(0.5, 1, 1, …, 1)Τ ∈ Rn

Παίρνουμε για όλα τα n και k

xtel =

NaN

Παρατηρούμε πως και στην τροποποιημένη μέθοδο παρουσιάζεται σφάλμα εξαιτίας του πίνακα JFn, ο οποίος δεν είναι αντιστρέψιμος αλλά ούτε καλά ορισμένος για το συγκεκριμένο αρχικό διάνυσμα, γεγονός που μας δείχνει πως δεν μπορούν να υπολογιστούν τα κρίσιμα σημεία στη συγκεκριμένη περίπτωση.

* Για X0 τυχαίο διάνυσμα, το οποίο δίνεται από την εντολή randn(n(i),1).
* n=4

Για τα συγκεκριμένα αποτελέσματα έχουμε:

X0 =

-0.4267

0.4685

0.2034

-1.6007

* k=4

xtel =

-0.3882

0.4846

0.2261

-1.5329

* k=6

xtel =

-0.3717

0.4915

0.2359

-1.5037

* k=20

xtel =

-0.3457

0.5024

0.2512

-1.4579

* k=200

xtel =

-0.3454

0.5025

0.2514

-1.4573

* n=6

Για τα συγκεκριμένα αποτελέσματα έχουμε:

X0 =

0.7659

-0.2563

-0.6622

-0.1532

0.3933

1.1050

* k=4

xtel =

0.7954

-0.1394

-0.5105

-0.0451

0.4547

1.1055

* k=6

xtel =

0.7968

-0.1336

-0.5031

-0.0398

0.4577

1.1055

* k=20

xtel =

0.7975

-0.1311

-0.4998

-0.0374

0.4591

1.1055

* k=200

xtel =

0.7978

-0.1299

-0.4982

-0.0363

0.4597

1.1055

* n=20

Για τα συγκεκριμένα αποτελέσματα έχουμε:

X0 =

0.1021

-1.7247

0.8343

-0.5465

1.8452

0.6100

0.6541

-0.3410

-0.8433

-0.7299

-1.2966

-0.8237

1.1819

-0.5983

-0.0596

1.5574

-0.4987

-0.2014

0.6913

0.1994

* k=4

xtel =

3.7907

* k=6

xtel =

3.7907

* k=20

xtel =

3.7907

* k=200

xtel =

3.7907

* n=200

Για τα συγκεκριμένα αποτελέσματα έχουμε:

X0 =

0.4626

-0.3784

-0.1769

1.6199

2.0215

-0.0344

-0.7741

-0.0908

-0.5774

-0.7186

-1.9744

-1.5501

-0.0294

-0.6471

1.3223

-1.8512

-0.9287

0.5028

0.4690

-0.4402

-1.0034

-2.3712

-0.4758

0.4695

-0.1210

-1.3692

0.9558

0.7370

-0.1904

0.0822

0.0736

0.1784

0.7718

-0.3603

1.5890

-1.1447

-0.3220

-0.8009

-0.6657

-1.6519

1.1657

0.0763

-0.1269

0.0962

-0.7108

-0.3700

0.8974

-0.0666

0.5110

0.6554

1.0282

-0.5350

-0.7453

0.3794

-0.9428

1.1756

-1.0733

1.0916

1.6264

-1.2885

1.1821

0.5190

0.1157

-0.2380

-0.1857

0.8829

-0.6467

-0.6098

3.0903

1.5915

1.0873

0.9580

-0.0254

-1.7396

-0.1910

0.7614

0.6716

1.6044

1.2222

0.4538

-0.5517

-0.2827

0.5106

-0.4710

-0.4448

1.4544

-0.1338

-1.5812

-2.1928

0.2452

-0.4791

-0.3974

-0.1396

0.0372

-1.0191

-0.0253

-2.1957

-0.9339

-0.3942

0.2774

0.2778

1.2668

1.6823

0.4450

-0.8266

0.5333

1.2527

1.1283

0.1025

-1.4556

-1.2887

-0.3661

0.5206

-0.5894

-1.5688

1.3210

-0.4526

1.0004

0.4371

-1.3053

0.0551

0.6739

-0.6857

-0.6943

0.3203

-1.0378

-0.6817

1.3258

-0.3438

0.4547

-0.4888

-1.5437

-0.4784

-0.5615

0.2011

-0.5030

1.0104

-2.0558

0.3890

-0.5322

0.9646

0.0682

1.6319

-0.4085

-0.3175

0.4753

1.0535

-1.2079

-2.6500

-0.1904

0.2489

1.5232

-0.2607

0.0918

0.6705

-0.6185

-1.0140

-0.2299

-1.7766

0.5055

-1.0364

-1.5556

0.0585

0.4784

-0.2345

0.5309

0.7542

0.6819

-0.2079

0.2653

-0.5523

1.5097

-0.7200

-1.1526

-0.6262

-0.6943

-1.2785

-1.2769

1.7293

0.0671

-0.9238

1.0671

-0.9584

1.5342

-0.2916

-0.7687

1.3203

-0.5577

0.0089

0.7272

0.2904

-0.6390

-2.1063

-0.7821

0.6825

1.0764

0.2456

0.9271

0.3228

1.4523

* k=4

xtel =

13.0499

* k=6

xtel =

13.0499

* k=20

xtel =

13.0499

* k=200

xtel =

13.0499

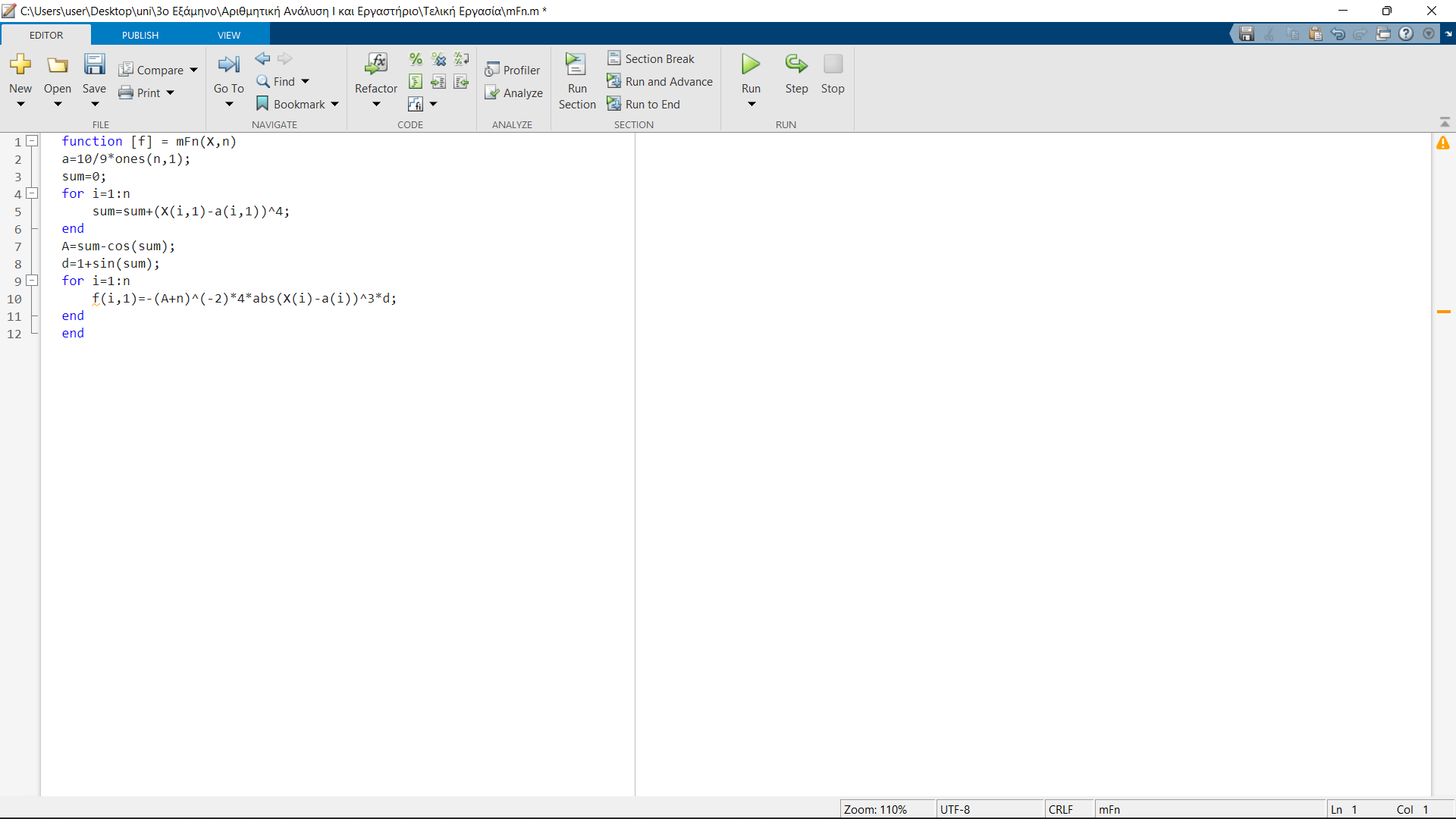
Όπως και πριν, η τροποποιημένη μέθοδος του Νεύτωνα χρησιμοποιεί τον Ιακωβιανό πίνακα υπολογισμένο στο Χ0 σε κάθε επανάληψη, επομένως με την χρήση αυτής της μεθόδου το πρόγραμμα είναι οικονομικότερο όσον αφορά τις πράξεις που εκτελούνται.

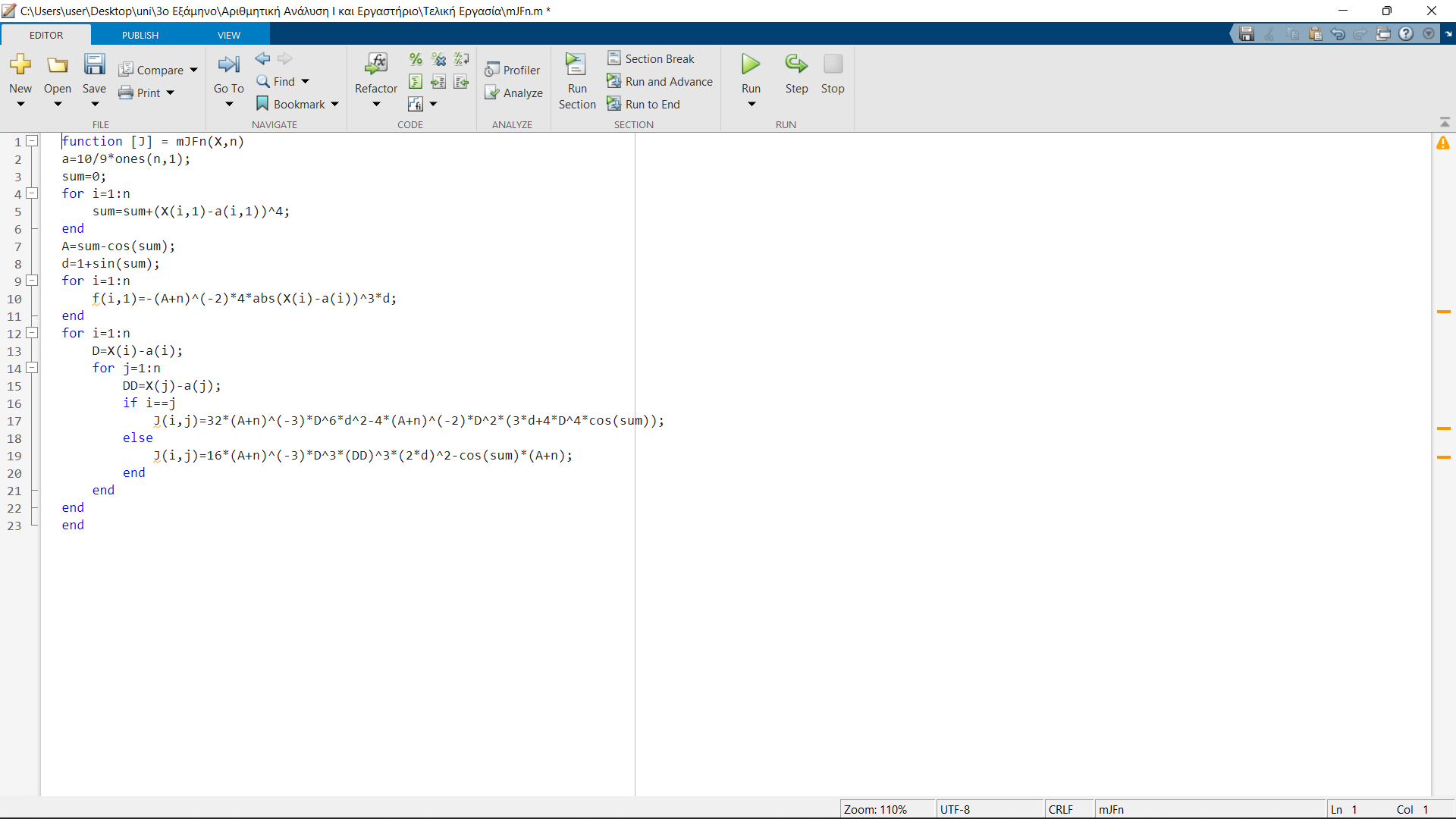
**Άσκηση 3**

Στην άσκηση 3 χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα MATLAB.

Για την βελτίωση του προγράμματος της άσκησης 2, ώστε να εκτελούνται όσο το δυνατό λιγότερες πράξεις κινητής υποδιαστολής, δηλαδή να γίνει το πρόγραμμα οικονομικότερο, τροποποιήσαμε της συναρτήσεις «Fn.m» και «JFn.m» και τις αποθηκεύσαμε ως «mFn.m» και «mJFn.m» αντίστοιχα.

Κώδικες:





Δεν έγινε τροποποίηση της συνάρτησης «NRn.m» ούτε του κώδικα της «NR2n.m», διότι η εκτέλεση της μεθόδου του Νεύτωνα έγινε με ανάποδη διαίρεση, χωρίς της χρήση της εντολής inv().